

α) Να αποδειχτεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ισχύει:

$$e^{nx} < xe + 1$$

β) Θεωρούμε ισοπλευρο τρίγωνο πλευρας 3 και 10 τυχαία σημεία M_1, M_2, \dots, M_{10} στο εσωτερικό του.

Αν d_{ik} είναι η απόσταση δύο σημείων M_i, M_k , όπου $i, k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία M_i, M_k με $i \neq k$, τέτοια, ώστε:

$$\int_1^{d_{ik}} e^{n\mu t} dt \geq \int_1^{d_{ik}} e^{te+1} dt$$

α)

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = e^{nx} - xe - 1$, με πεδίο ορισμού $A = [0, \frac{\pi}{2}]$

- η συνεχής στο $[0, x]$ σαν ...
- η παραγωγίσιμη στο $[0, x]$ σαν ...

Από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in [0, x]$:

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{e^{nx} - xe - 1 - [e^{n \cdot 0} - 0 \cdot e - 1]}{x} \\ &= \frac{e^{nx} - xe - 1 - 1 + 1}{x} = \frac{e^{nx} - xe - 1}{x} \quad [1] \end{aligned}$$

Ομως,

$$h'(x) = e^{nx} \cdot \text{συν} x - e \Leftrightarrow h'(\xi) = e^{n\xi} \cdot \text{συν} \xi - e$$

$$\stackrel{[1]}{\Leftrightarrow} \frac{e^{nx} - xe - 1}{x} = e^{n\xi} \cdot \text{συν} \xi - e \quad [2]$$

$$0 < \xi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \text{συν} \xi < 1 \\ 0 < n\xi < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \text{συν} \xi < 1 \\ e^{n\xi} < e^1 \end{cases} \Leftrightarrow e^{n\xi} \cdot \text{συν} \xi - e < 0$$

$$\stackrel{[2]}{\Leftrightarrow} \frac{e^{nx} - xe - 1}{x} < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} e^{nx} - xe - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{nx} < xe + 1$$

β)

Χωρίζουμε το τρίγωνο σε 9 ισοπλευρα τρίγωνα πλευρας 1.

Τότε,

2 τουλάχιστον από τα 10 σημεία θα βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο πλευρας 1 και η μέγιστη απόστασή τους θα είναι 1,

δηλαδή

$0 < d_{ik} < 1$ με $i \neq k$ και από το [α]

$$e^{nx} < xe + 1 \Leftrightarrow e^{n\mu x} < e^{xe+1} \stackrel{0 < d_{ik} < 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_{d_{ik}}^1 e^{n\mu t} dt \leq \int_{d_{ik}}^1 e^{te+1} dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{d_{ik}} e^{n\mu t} dt \geq \int_1^{d_{ik}} e^{te+1} dt$$

